Metody matematyki zadaniowej – funkcje
Autor tekstu: **Krzysztof Kapulkin**

Funkcje, czyli jednoznaczne przyporządkowania, są wykorzystywane w bardzo wielu gałęziach matematyki zadaniowej. Celem niniejszego artykułu jest zwrócenie uwagi na różnorodność ich wykorzystania.

Najprostszym przykładem wykorzystania funkcji są zadania zawierające równania funkcyjne. Równanie takie wskazuje nam pewne własności funkcji, a naszym zadaniem jest określenie kilku pozostałych własności. Spróbujmy rozwiązać poniższe zadanie:

Zadanie 1

Niech Q oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon Q \to Q$ spełniające warunek

$f(x^2+y) = xf(x) + f(y)$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y.

Zadanie to (jak i podobne zadania o równaniach funkcyjnych) można rozwiązać na kilka sposobów. Najprostszym i najefektywniejszym jest przekształcanie równania.

Niech $a = f(1)$. Wówczas dla dowolnej liczby wymiernej x mamy

$f(-x) = f(x^2 - x) - xf(x) = f((x - 1)^2 + (x - 1)) - xf(x) = (x - 1)f(x - 1) + f(x - 1) - xf(x) =$
$= x(f(x - 1) - f(1^2 + (x - 1))) = - xf(1) = - ax,$

skąd $f(x) = ax$ dla dowolnej liczby wymiernej x.

Bezpośrednio sprawdzamy, ze każda funkcja określona wzorem $f(x)=ax$,

gdzie a jest liczba wymierna, spełnia warunki zadania.

Zadanie to można również rozwiązać podstawiając za x i y do równania pewne wartości, przez co otrzymujemy konkretne wartości funkcji, a w konsekwencji poznajemy jej własności. Rozwiązanie tym sposobem pozostawiam Czytelnikowi.

Inną popularna metodą rozwiązywania równań funkcyjnych jest… zgadywanie rozwiązania. Przyjrzyjmy się bowiem następującemu zadaniu:

Zadanie 2

Niech N oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon N \to N$, że dla każdego n należącego do N zachodzi równość

$f(f(n)) = 2n$.

Tym razem najprostszym rozwiązaniem będzie stwierdzenie, że taka funkcja istnieje oraz próba zgadnięcia jej wzoru. Niech A oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, w których rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 3 występuje nieparzystą ilość razy. Zdefiniujemy naszą funkcję wzorem: $f(n) = 6n$ dla n nienależących A oraz $f(n) = n/3$ dla n należących do A. Tak zdefiniowana funkcja spełnia warunki zadania.

Za pomocą pojęcia funkcji możemy rozwiązywać również inne zadania, dotyczące na przykład teorii liczb. Wśród nich na przykład takie zadanie:

Zadanie 3

Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$x^{2000} + 2000^{1999} = x^{1999} + 2000^{2000}$

Może się wydawać, że zadanie to najłatwiej będzie rozwiązać, przenosząc wiadome na jedną, niewiadome na druga stronę równania, a następnie badając podzielność obu stron.

Prostszym rozwiązaniem będzie jednak sprowadzenie danego równania do postaci $f(x) = f(2000)$, gdzie $f(x) = x^{2000} - x^{1999} = (x - 1)x^{1999}$

Badając własności tej funkcji, zastanowimy się, kiedy nasze równanie jest spełnione. Ponieważ f jest funkcją rosnącą dla x niemniejszych niż 1, więc dane równanie ma w tym przedziale tylko jedno rozwiązanie, którym jest $x = 2000$. Dla x niewiększych niż 0 funkcja f jest malejąca, więc istnieje co najwyżej jedna liczba całkowita ujemna a, dla której $f(a) = f(2000)$. Czytelnik zechce sam sprawdzić, że zachodzi: $- 2000 < a < - 1999$, wobec czego nie jest liczbą całkowitą, nie może zatem spełniać warunków zadania.

Wobec tego otrzymujemy jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych: $x = 2000$

Ostatnim przykładem wykorzystania funkcji będzie zadanie z geometrii. Spróbujmy rozwiązać takie zadanie:

Zadanie 4

Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

Przyjmijmy, że dany wielokąt ma 2n boków. Dla każdego jego wierzchołka definiujemy funkcję

f(X) = "suma długości n kolejnych boków leżących na prawo od X" — "suma długości n kolejnych boków leżących na lewo od X"

Zauważmy, że f przyjmuje tylko wartości parzyste, ponieważ suma długości n kolejnych boków leżących na prawo od X i suma długości n kolejnych boków leżących na lewo od X sumują się, zgodnie z danymi do liczby o takiej samej parzystości.

Zdefiniujmy teraz następujące pojęcie: wierzchołek przeciwległy do danego. Jest to wierzchołek, który leży n boków w prawą lub lewą stronę od danego. Wierzchołek przeciwległy do X będziemy oznaczać X'.

Zauważmy, że

(1) f(X') = — f(X)

Zauważmy także, że jeżeli funkcja przyjmuje wartość a dla pewnego wierzchołka, to dla wierzchołka leżącego obok niego może przyjąć wartość a — 2, a, a + 2.

Zadanie nasze polega na wykazaniu, że istnieje taki wierzchołek A, że f(A) = 0. Mogą zajść dwie możliwości:

1. Dla wszystkich wierzchołków f(X) przyjmuje te same wartości. Ale wtedy jest to wartość 0, zatem teza zadania zachodzi.

2. Istnieje pewien wierzchołek B, dla którego f(B) = a, gdzie a jest parzystą liczbą całkowita dodatnią. Zatem zgodnie z (1) istnieje też B', dla którego f(B') = — a. Skoro tak, to pomiędzy wierzchołkami B i B' musi znajdować się jeden spełniający warunek f(X) = 0.

Czytelnikom, którzy chcieliby spróbować swoich sił w rozwiązywaniu podobnych zadań polecam rozwiązanie następującego „zadania domowego":

Zadanie 5

Dana jest funkcja f: R → R, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

f(x) = f(2x) = f(1 — x)

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Źródła zadań:

Zadanie 1 — I etap olimpiady matematycznej 2003/04
Zadanie 2 — II etap olimpiady matematycznej 1999/2000
Zadanie 3 — I etap olimpiady matematycznej 2000/01
Zadanie 4 — I etap olimpiady matematycznej 2003/04
Zadanie 5 — II etap olimpiady matematycznej 2001/02
Zadania wraz z rozwiązaniami można znaleźć na stronie www.om.edu.pl.

Krzysztof Kapulkin
Interesuje się matematyką.

Pokaż inne teksty autora

(Publikacja: 01-09-2004 Ostatnia zmiana: 02-09-2004)
Oryginał.. (http://www.racjonalista.pl/kk.php/s,3582)