Sieć pojęciowa a matematyka

Autor tekstu: **Bernard Korzeniewski**

Matematyka na równi z logiką ma, *explicite* lub *implicite,* pretensje do idealnego, absolutnie „ostrego" dookreślcnia stosowanych w niej pojęć. Sama składnia matematyki, jej stosunkowo bardzo dobrze zdefiniowany zespół reguł i aksjomatów stwarza pozór systemu całkowicie autonomicznego i niezawisłego od świata. W takim wypadku, wychodząc od przyjętych założeń, matematyka głosiłaby twierdzenia ważne absolutnie. Arbitralność, a zarazem niczym nie ograniczona swoboda doboru aksjomatów ma uniezależnić matematykę od świata. Fakt jego istnienia lub nieistnienia byłby więc dla niej bez znaczenia. W tym ujęciu tworom zdefiniowanym w obrębie matematyki niekoniecznie musi odpowiadać coś realnego i to wzgardzenie światem zewnętrznym ma stanowić o jej autonomii.

Jednakże absolutyzm twierdzeń matematyki jest nie do pogodzenia z koncepcją sieci pojęciowej. Dopiero co zanegowaliśmy autonomię semantyczną logiki, a przecież od czasu Whitehead'a i Russell'a nowoczesna matematyka opiera się właśnie na logicznych podstawach. Mówiąc ogólniej, matematyka jest także formą języka (oraz, oczywiście, kryjącej się pod nim sieci pojęciowej). Jest to, podobnie jak zasady logiki, język o wiele lepiej zdefiniowany niż język potoczny. Oznacza to, że pojęcia odpowiadające nazwom języka matematyki są lepiej dookreślone, a relacje pomiędzy nimi bardziej jednoznaczne. Różnice są na tyle istotne, że rzeczywiście matematyka może uchodzić subiektywnie za twór autonomiczny. Takim jednak nie jest. Oczywiście w jej obrębie pewne twierdzenia mogą uchodzić za absolutne „z dostatecznie dobrym przybliżeniem". Oznacza to, że w stosunkowo rozległym otoczeniu pojęciowym konsekwentna analiza tego twierdzenia nie prowadzi do sprzeczności. Nie zmienia to jednak faktu, że matematyka może być „absolutna" jedynie lokalnie i jedynie w przybliżeniu. Zresztą wszelkie podstawowe pojęcia matematyki jak punkt, prosta, równoległość czy liczba pochodzą z języka potocznego. Oczywiście dla celów systemu matematycznego zostały one lepiej dookreślone, przy czym dookreślenie to polegało przede wszystkim na abstrahowaniu od pewnych cech akcydentalnych, towarzyszących różnym desygnatom tych pojęć w świecie „realnym". Jednakże „jądro" znaczeniowe zostało zachowane, jak też oczywiście „podstawowe" relacje konotacyjne z innymi pojęciami. Tym samym nie do uniknięcia są wewnętrzne sprzeczności przy analizie systemu matematyki.

W celu ich uniknięcia zostały one (a do dyspozycji była prawie nieograniczona swoboda w doborze i konstrukcji aksjomatów) nieświadomie zepchnięte w warstwę owych aksjomatów, tak jednak, że nie jest to na pierwszy rzut oka widoczne. Przykrywką dla tego rodzaju zabiegu miała tu być całkowita wolność matematyka w budowie systemu założeń. Wiele przy tym włożono wysiłku w badanie, czy nie są one zewnętrznie (pomiędzy sobą) sprzeczne, natomiast o wiele mniej w stwierdzenie, czy nie są one sprzeczne wewnętrznie. Weźmy prosty przykład: określenie osi współrzędnych w przestrzeni. W matematyce odbywa się to mniej więcej w ten sposób (mówiąc oczywiście przykładowo i w uproszczeniu): mamy ciągłą, nieskończoną przestrzeń, ustalamy na niej punkt będący środkiem układu współrzędnych, ustalamy przecinające się w tym punkcie proste wzajemnie prostopadłe, będące osiami współrzędnych oraz określamy wzorcową jednostkę odległości. Nasze podstawowe zastrzeżenie dotyczy ostatniej operacji. Jeżeli raz zdefiniujemy na osi współrzędnych odcinek o długości 1, a następnie jako odcinek o długości 1 określimy odcinek dwa razy dłuższy, to po analizie dojdziemy do wniosku, że te odcinki niczym się między sobą nie różnią. Ponieważ każdy odcinek na prostej składa się z nieskończonej ilości punktów, możemy ten odcinek rozciągnąć i skurczyć dowolnie i nadal pozostanie on tym samym odcinkiem.

Posłużmy się obrazowym przykładem. Jako przestrzeni dwuwymiarowej użyjemy powierzchni morza. Dwie osie współrzędnych określimy na nim za pomocą równomiernie rozmieszczonych pływaczków. Jeżeli teraz ruch wody zaburzy położenie pływaczków, jedne się do siebie zbliżą, inne oddalą, to nie dysponujemy w obrębie morza żadną miarą, aby ten fakt stwierdzić, ponieważ tą miarą jest z definicji odległość między pływaczkami. Jeżeli więc zgodnie z jakąś miarą „zewnętrzną" rozmieścimy pływaczki na osi współrzędnych co metr, a po minucie stwierdzimy, że jakieś dwa sąsiednie pływaczki są odległe od siebie o 5 cm, to oczywiste jest, że powstał zupełnie nowy układ współrzędnych. Żeby to jednak stwierdzić, potrzebna jest miara „zewnętrzna", ponieważ, zgodnie z definicją odległość między pływaczkami nadal wynosi 1 metr. Jednakże przy definiowaniu w matematyce metryki przestrzeni niczym takim jak miara „zewnętrzna" nie dysponujemy. Trzeba by ją pierwej zdefiniować, co przeniosłoby sprzeczność o jedno piętro wyżej. Tak więc nałożenie jakiejkolwiek metryki na przestrzeń ciągłą jest zabiegiem wewnętrznie sprzecznym. Inaczej można to wyrazić przez stwierdzenie, że nieskończona ilość punktów pomnożona przez zerowe rozmiary punktu nigdy nie da w iloczynie jakiejkolwiek określonej liczby rzeczywistej, a po prostu nieokreśloność. Tę podstawową sprzeczność można oczywiście za pomocą odpowiednich zabiegów aksjologicznych zepchnąć na głębszy poziom, (np. w rachunku różniczkowym), gdzie być może będzie ją trudniej wytropić i tak też matematyka nieświadomie czyni. Z tego powodu niejeden matematyk może uznać powyższy zarzut za naiwny, poruszający problemy, które matematyka dawno już przezwyciężyła. Twierdzimy jednak, że owo „przezwyciężenie" polegało jedynie na uwikłaniu sprzeczności w tak dobraną sieć odniesień (konotacji), że stała się ona trudna do wykrycia ze względu na niedostateczne dookreślenie naszego aparatu pojęciowego w tym regionie.

Często zresztą postrzeganie takich sprzeczności czy niekonsekwencji podciągane jest pod myślenie „zdroworozsądkowe". Jednakże, na przykład paradoks żółwia i Achillesa nie został jeszcze (i nie zostanie) rozwiązany, a rozwiązania pozorne polegają na uwikłaniu go w tak skomplikowaną sieć relacji semantycznych, że jej analiza jest na razie niemożliwa. Wspomniany paradoks doczekał się „rozwiązania" w kontekście (w obrębie) formalizmu rachunku różniczkowego. Formalizm ten nie jest jednak w pełni przekładalny na potoczną mapę pojęciową. Pojęcia, którymi operuje, jak „nieskończenie mały", są dla nas intuicyjnie niezrozumiałe, obce, nie możemy sobie ich wyobrazić. Wyjaśnienia na nich oparte są więc w pewnym sensie tłumaczeniem *ignotum per ignotum.* Jeżeli problem X, sformułowany w obrębie mapy pojęciowej A, ma być rozwiązany w kontekście mapy pojęciowej B, a wnioski z powrotem przeniesione do mapy A, to spełnione powinny zostać dwa warunki. Po pierwsze, problem X musi być wyjaśniony w kontekście semantycznym mapy B. Po drugie, mapa B musi być całkowicie przekładalna na mapę A. W naszym przykładzie drugi warunek ewidentnie nie został spełniony, jako że rachunek różniczkowy wymyka się „zdrowemu rozsądkowi" (u nas X to oczywiście paradoks żółwia i Achillesa, B to rachunek różniczkowy, a A to potoczna mapa pojęciowa). W tym sensie uważamy, że paradoks żółwia i Achillesa do dzisiaj nie doczekał się rozwiązania. Zatem sprzeczność leżąca u podstawy tego paradoksu została w rachunku różniczkowym usunięta z samego paradoksu i przeniesiona na styk mapy pojęciowej rachunku różniczkowego i potocznej mapy pojęciowej. Rachunek różniczkowy tworzy więc lokalnie niesprzeczne otoczenie semantyczne, umożliwiające (również tylko lokalne) rozwiązanie paradoksu. Podejście takie jest jak najbardziej wskazane ze względów praktycznych — dobrze możemy operować tylko dostatecznie dookreśloną, „gęstą" znaczeniowo siecią pojęciową. Jednakże zadaniem filozofii jest taki stan rzeczy rozpoznać.

Wracając do naszego przykładu, przestrzeń ciągłą można badać co najwyżej metodami topologii, natomiast posiadać metrykę (tj. osie współrzędnych z określonymi odległościami) może ewentualnie tylko przestrzeń skwantowana. Czy jest ona wewnętrznie niesprzeczna? Zgodnie z prezentowaną tu koncepcją system całkowicie wewnętrznie niesprzeczny jest w ogóle niemożliwy, natomiast możliwe jest zaistnienie sprzeczności w bardziej zawoalowanej formie. Nie twierdzimy oczywiście, że z powodu posiadanych sprzeczności matematyka jest niewiele warta. Wprost przeciwnie. Jak każda mapa pojęciowa, jest ona skazana na operowanie pojęciami zdefiniowanymi tylko w przybliżeniu i tylko lokalnie. W tym ujęciu jest ona (obok logiki) najlepiej dookreśloną mapą pojęciową w obrębie kryształu pojęć. Jednakże przypisywanie matematyce absolutnej ważności, autonomii czy uprawomocnienia jest zarówno niesłuszne filozoficznie, jak i prowadzi w pewnych skrajnych przypadkach do nieporozumień wynikających z nieznajomości jej ograniczeń.

Bernard Korzeniewski
Biolog, doktor habilitowany, pracownik naukowy Uniwersytetu Jagielońskiego (Instytut Biologii Molekularnej i Biotechnologii). Twórca cybernetycznej definicji życia, łączącej paradygmaty biologii, cybernetyki i teorii informacji ("Trzy ewolucje", 1998; "Journal of Theoretical Biology", 2001; rec. "New Scientist"). Zajmuje się biologią teoretyczną - m.in. komputerowym modelowaniem oddychania w mitochondriach. Jest kierownikiem kilku grantów naukowych, laureatem Nagrody Prezesa Rady

Ministrów za habilitację oraz stypendystą uniwersytetów w Cambridge, Bordeaux, Halle oray Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej. Autor książek: "Absolut - odniesienie urojone" (Kraków 1994); "Powstanie i ewolucja życia" (Rzeszów 1996); "Trzy ewolucje: Wszechświata, życia, świadomości" (Kraków 1998); "Od neuronu do (samo)świadomości" (2005).
Strona www autora

Pokaż inne teksty autora

(Publikacja: 30-10-2004)
Oryginał.. (http://www.racjonalista.pl/kk.php/s,3726)