Bóg i pewnik wyboru

Autor tekstu: **Bogdan Miś**

Prawie dokładnie 100 lat temu — w roku 1904 — Ernest Zermelo, matematyk niemiecki, sformułował pewną wypowiedź matematyczną, która zdobyła potem ogromną sławę. Orzeka ona otóż o fakcie w szczególnym przypadku dość oczywistym: o tym mianowicie, że jeśli mamy jakąś liczbę zbiorów, to możemy z każdego z nich wyjąć po jednym elemencie i utworzyć w ten sposób nowy zbiór. Rzeczywiście, jeśli pomyślimy o kilku czy kilkunastu kupkach zapałek, to możliwość utworzenia nowej kupki przez wyjęcie po jednej zapałce z każdej z wyjściowych i odłożenie na bok jest wręcz zabawnie bezdyskusyjna...

Problem zaczyna się wtedy, gdy liczba zbiorów wyjściowych jest nieskończona. Sytuacja wówczas — okazuje się — przestaje być oczywista i przyjęcie prawdziwości wzmiankowanej wypowiedzi, zwanej **pewnikiem wyboru**, może prowadzić do wniosków wręcz paradoksalnych. Założenie tego skutkuje na przykład możliwością tzw. paradoksalnego rozkładu kuli (słynny wynik wielkiego polskiego matematyka, Stefana Banacha): każdą kulę da się pociąć na części, z których można złożyć… dwie kule identyczne z początkową.

Dla uspokojenia czytelnika wyjaśniam od razu, że ta możliwość jest czysto teoretyczna, dowód twierdzenia jest, jak mówią matematycy, **nieefektywny**: nie zawiera wskazówek **jak konkretnie** to zrobić. Żartobliwie rzecz ujmując, paradoksalny rozkład kuli doskonale wyjaśnia biblijne rozmnożenie chleba; widać Chrystus znał dowód efektywny...

Skoro jednak przyjęcie prawdziwości pewnika wyboru prowadzi do paradoksów, to może oznacza to po prostu, że należy go odrzucić? Otóż — nie; po pierwsze, byłoby rzeczą „nieelegancką", gdyby jakaś wypowiedź była oczywiście prawdziwa w przypadku skończonym, nieprawdziwa zaś - po naturalnym, zdawałoby się, uogólnieniu. Po drugie i ważniejsze, bez pewnika wyboru nie tylko dowody wielu ogromnie ważnych i pożytecznych twierdzeń matematyki stałyby się piekielnie trudne, ale niektórych z nich po prostu w żaden sposób nie dałoby się dowieść w ogóle; mówiąc ostrożnie, **dziś** nie umielibyśmy twierdzeń tych bez owego pewnika udowodnić.

Tak więc — pewnik wyboru budzi określone kontrowersje. Budził je zresztą od samego początku, co było — mówiąc nawiasem — z wielkim pożytkiem dla nauki, zaowocowało bowiem szeregiem wspaniałych prac Poincarego, Borela, Lebesgue'a, Sierpińskiego, Tarskiego, Zorna i wielu innych, które znacząco posunęły do przodu wiedzę matematyczną; szczególnie z dziedzin takich, jak teoria mnogości i logika.

Co ma do tego wszystkiego Bóg — zapytacie? Chwileczkę; zaraz o tym będzie.

Jedną z konsekwencji pewnika wyboru jest twierdzenie o możliwości **dobrego uporządkowania** dowolnego zbioru. Mówi ono, że niezależnie od natury rozważanego zbioru (który w szczególności może być nieskończony i w ogóle tak skomplikowany pod jakimkolwiek względem, jak sobie tylko zamarzymy) da się w tym zbiorze zawsze tak określić pewną relację (zwaną **porządkiem;** można ją uważać za coś analogicznego do relacji **mniejszości** wśród liczb całkowitych) między jego elementami, że każde dwa z nich da się porównać, że jeśli jeden element poprzedza drugi, drugi zaś — pierwszy, to oba są identyczne; że wreszcie pewien element naszego zbioru nie będzie miał w sensie tej relacji poprzednika, będzie **pierwszy**.

No i teraz rozumujemy następująco (po raz pierwszy usłyszałem to rozumowanie pół wieku temu i nie znam jego autora): przypuśćmy, że pewnik wyboru jest prawdziwy; wówczas weźmy pod uwagę zbiór wszystkich **przyczyn** wszystkich możliwych zjawisk. Na mocy pewnika możemy go dobrze uporządkować; okaże się, że musi istnieć w nim pierwszy element, czyli **pierwsza przyczyna**. Nazwijmy ją Bogiem; tak tedy, jeśli pewnik wyboru jest prawdziwy, to Bóg istnieje.

Odwrotnie: załóżmy, że Bóg istnieje. Jeśli tak, to - jak wiadomo — jako istota wszechmocna, może spowodować prawdziwość dowolnej wypowiedzi. W szczególności, może spowodować prawdziwość pewnika wyboru...

Wniosek: istnienie Boga jest **dokładnie równoważne** pewnikowi wyboru. Dziwne, prawda?

Nieco niżej pokażę ciekawym (a może już: zirytowanym), dlaczego powyższe rozumowanie należy jednak uznać za żart matematyczny. Na razie jednak załóżmy, że jest ono bez zarzutu i powróćmy do historii matematyki.

W XX wieku — o czym mało kto wie, zwłaszcza u nas, bo w pięknym kraju między Odrą a Bugiem nie wypada nie znać jakichś mało znaczących wierszyków Mickiewicza, jak najbardziej natomiast wypada chwalić się kretyństwem matematycznym i nieznajomością twierdzenia Pitagorasa — otóż więc w XX wieku w matematyce dokonało się kilka przełomów, które wręcz zmieniły filozofię tej nauki. Autorem jednego z tych przełomów był młody (wówczas) matematyk amerykański, Paul Joseph Cohen. „Załatwił" on w 1964 roku jeden po drugim (a właściwie jednocześnie, bo metoda była wspólna) dwa piekielnie trudne zagadnienia: tak zwaną „hipotezę continuum" oraz sprawę pewnika wyboru właśnie.

Dla porządku — dwa słowa o hipotezie continuum. Z grubsza mówiąc, powiada ona, że „ilość" liczb naturalnych bezpośrednio poprzedza „ilość" liczb rzeczywistych, że pomiędzy te dwie „ilości" nie da się już wstawić żadnej innej. Geometrycznie znaczy to z kolei, że punktów na prostej odległych od siebie o jednostkę jest istotnie „mniej" niż wszystkich punktów na prostej (choć w obu wypadkach chodzi o wielkości nieskończone), ale nie da się na prostej zbudować takiego zbioru, który zawierałby punktów „więcej" niż ten pierwszy, ale „mniej" niż ten drugi. Jest to dla zwykłego człowieka czysta abstrakcja i ktoś nieobyty ze światem pojęć matematycznych w ogóle tego nie pojmie; nic dziwnego, że ów zwykły człowiek prawdziwością (lub nie) hipotezy continuum się specjalnie nie pasjonował; tym bardziej, że związane z nią paradoksy — a są takie — też do bardzo łatwych do zrozumienia nie należą. Inaczej niż z pewnikiem wyboru, o czym było wyżej.

No i młody Cohen udowodnił coś, co matematykami wstrząsnęło. Udowodnił mianowicie, że zarówno pewnik wyboru jak i hipoteza continuum są **niezależne** od pozostałych aksjomatów matematyki. Można sobie wyobrazić matematykę z prawdziwym pewnikiem wyboru i fałszywą hipotezą continuum, z fałszywym pewnikiem i prawdziwą hipotezą, prawdziwym wreszcie — lub fałszywym - jednocześnie jednym i drugim zdaniem. Nigdy nie popadniemy w sprzeczność.

Słowem: nie ma **jednej matematyki**. Słowem — **matematyka nie może mieć nic wspólnego z tzw. światem rzeczywistym;** w tym sensie, że nie jest nauką przyrodniczą. Matematyka — lub dokładniej jakiś jej wariant — jest co najwyżej piekielnie precyzyjnym językiem opisu tej rzeczywistości; **tylko** tym, i **aż** tym.

Wróćmy teraz do równoważności: Bóg — pewnik wyboru. Owa równoważność szalenie ucieszyła tych fideistów, którzy (czyżby w walce z własnym niewypowiadalnym wątpieniem?) nieustannie szukają kolejnych „dowodów" istnienia Wszechmogącego. Ponieważ pewnik wyboru jest — jak mówiliśmy - narzędziem pożytecznym, czasami zaś matematykom wręcz niezbędnym, przeto uznali oni, że oto nauka dała im do ręki kolejny argument; i to wspaniały, bo matematyczny. A przecież już Immanuel Kant uczył, że „w każdym poznaniu tyle tylko jest prawdy, ile w nim jest matematyki"...

Niestety, odkrycia Cohena byłyby tu bardzo nieprzyjemnym kubłem wody. Wynikałoby z nich, że świat bez Boga jest równie dobry (lub równie zły, jak tam kto woli) jak świat z Bogiem; że hipoteza istnienia Boga nie jest ani oczywista, ani konieczna, że jest po prostu naukowo **obojętna**, nie ma dokładnie nic wspólnego z rzeczywistością Przyrody. Nawiasem mówiąc, jest to dość dokładnie stanowisko wielu racjonalistów, którzy — wbrew tym, którzy nas koniecznie chcieliby nawrócić — ani z żadną religią nie walczą (bo nie jest walką z religią antyklerykalizm, czy dążenie do ścisłego oddzielenia Kościołów od państwa), ani jej nie wyznają.

Tyle, że jednak przytoczony wyżej dowód równoważności istnienia Boga i pewnika wyboru jest jednak, jak powiedziałem, żartem: wszechmoc Istoty Najwyższej nie może prowadzić do tego, by spowodowała ona - nawet ona! — jednoczesną prawdziwość dwóch zdań sprzecznych w ramach tego samego zestawu aksjomatów. Nawet więc Pan Bóg nie jest w stanie spowodować, by wypowiedź „a i nie-a" była prawdziwa. A więc, jeśliby pewnik wyboru był rzeczywiście sprzeczny z innymi aksjomatami matematyki, to nawet sam Pan Bóg nie mógłby tego odwołać...

Jeśli więc Czytelnik uzna w tym miejscu, że cały ten artykuł, włącznie z nieco prowokacyjnym tytułem, powstał po to głównie, by go przekonać, że w matematyce dzieją się rzeczy dziwne i ciekawe, że nie jest to nauka ani martwa, ani pozostająca w zastoju — to z pokorą przyjmę ten zarzut. I podziękuję pięknie za doczytanie go do końca. I — być może - dowiedzenie się po raz pierwszy w życiu czegoś o hipotezie continuum oraz pewniku wyboru.

Bogdan Miś

Ur. 1936. Matematyk z wykształcenia; dziennikarz naukowy, nauczyciel akademicki i redaktor - z zawodu. Członek Komitetu Prognoz Polskiej Akademii Nauk "POLSKA 2000+". Wykładał - m.in. matematykę, informatykę użytkową, zasady dziennikarstwa telewizyjnego i internetowego - na Uniwersytecie Warszawskim (Wydz. Matematyki i Wydz. Dziennikarstwa), w Wyższej Szkole Ubezpieczeń i Bankowości, w Wyższej Szkole Stosunków Międzynarodowych i Amerykanistyki, w Akademii Filmu i Telewizji. Przez 25 lat pracował w TVP, ma na koncie ok. 1000 własnych programów; pełnił funkcję I zastępcy dyrektora programowego. Napisał ok. 20 książek, w większości popularnonaukowych, poświęconych matematyce i komputerom. Poza popularyzacją nauki, główną jego pasją są komputery z którymi jest, jak pisze, "zaprzyjaźniony od zawsze (tzn. od "ich zawsze")". Był programistą już przy pierwszej polskiej maszynie XYZ w roku 1959. Był także redaktorem naczelnym "PC Magazine Po Polsku" i "Informatyki", a w stanie wojennym - "Strażaka"; kierował działem nauk ścisłych w "Problemach" oraz działem matematyki i informatyki w "Wiedzy i Życiu". Obecnie publikuje okazjonalnie w "Polityce". Jest autorem witryn internetowych, m.in. www.wssmia.kei.pl, gbk.mi.gov.pl, prognozy.pan.pl. Jest członkiem ISOC, Polskiego Towarzystwa Matematycznego i członkiem-założycielem Naukowego Towarzystwa Informatyki Ekonomicznej.

Pokaż inne teksty autora

(Publikacja: 27-07-2005)
Oryginał.. (http://www.racjonalista.pl/kk.php/s,4282)